

Aufgabe 1

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem **Gauss-Algorithmus**, wobei die Systemmatrix A und die rechte Seite b wie folgt gegeben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ und a) } b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ bzw. b) } b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Interpretieren Sie die Fälle a) und b) geometrisch.

Aufgabe 2

Lösen Sie mit dem **Gauss-Algorithmus**:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Aufgabe 3

Für welche Werte von a ist das folgende Gleichungssystem lösbar?

Geben Sie die zugehörigen Lösungen an, (geometrische Interpretation).

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = 9 \\ 2x + 3y + z = a^2 - 4a + 6 \\ x + y + z = 3 \\ 5x + 6y + az = 15 \end{cases}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie positive Zahlen a, b, c, d, e und f so, dass für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -c & d \\ e & 0 & -f \end{pmatrix} \quad \text{gilt: } B^T \cdot B = I_3$$

Was gilt für $B \cdot B^T$?

Aufgabe 5

Es sei I_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix, A eine $n \times n$ -Matrix und $A_1 := A - I_n$. Dann lässt sich A^k wie folgt berechnen:

$$A^k = (I_n + A_1)^k = I_n + \binom{k}{1} A_1 + \binom{k}{2} A_1^2 + \dots + \binom{k}{k} A_1^k \quad (1)$$

Betrachten Sie das Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie, dass für dieses Beispiel $A_1^k = 0$ für $k \geq 3$ gilt.

b) Berechnen Sie für das gegebene Beispiel A^{10} mit Hilfe von (1).

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Summe

$$s_n = \sum_{l=1}^n \frac{1}{(2l+1)(2l-1)}$$

Tipp: Bestimmen Sie zuerst $s_1, s_2, \dots$

Aufgabe 7

Schreiben Sie mit Σ :

$$s = 1 + 2 - 3 + \frac{7}{2} - \frac{19}{5} + 4 - \frac{29}{7} + \frac{17}{4} - \frac{13}{3} + \frac{22}{5}$$

Aufgabe 8

Vereinfachen Sie

$$s = (x-1) \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{11} (k+1) x^k - \sum_{k=1}^{11} k x^k \right\}$$