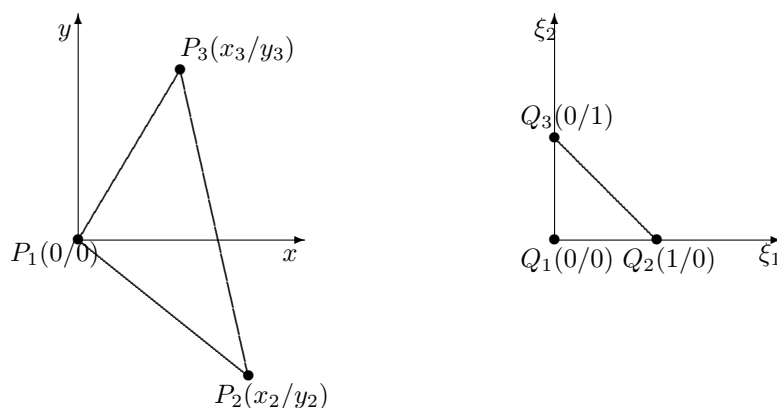


DMa 3 Serie 1

Aufgabe 1

Bilden Sie das Dreieck $P_1P_2P_3$ auf das Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ ab.



Aufgabe 2

Gegeben seien die folgenden Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in sich:

- $\mathcal{F}_1$: Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_2$
- $\mathcal{F}_2$: Spiegelung an der Ebene $x_1 = 0$
- $\mathcal{F}_3$: Drehung um die x_3 -Achse um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{6}$

- a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen A_k bzgl. der Standardbasis Σ_e der Abbildungen $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2, 3$.
- b) Verifizieren Sie mit Hilfe der Matrizen A_1 , A_2 und A_3 die Gleichung

$$\mathcal{F}_3 \circ \mathcal{F}_3 \circ \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$$

geometrische Interpretation

Aufgabe 3

Wir betrachten die *lineare* Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, welche die drei Basisvektoren e_1 , e_2 und e_3 des $\mathbb{R}^3$ wie folgt abbildet:

$$\mathcal{F}(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie das Bild P' des Punktes $P(6/2/3)$ unter $\mathcal{F}$.
- b) Bestimmen Sie alle Punkte des $\mathbb{R}^3$, die auf $Q'(2/1)$ abgebildet werden.
- c) Geben Sie den *Kern*, d.h. $\mathcal{F}(x) = 0$ von $\mathcal{F}$ an.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgende *lineare* Abbildungen im $\mathbb{R}^3$ bzgl. der Standardbasis Σ_e

- a) Spiegelung S an der xz -Ebene.
- b) Drehung D_x um die x -Achse, Drehwinkel φ_x
Drehung D_y um die y -Achse, Drehwinkel φ_y
Drehung D_z um die z -Achse, Drehwinkel φ_z
- c) Zusammensetzung: zuerst Spiegelung S , dann D_z , dann D_x und schliesslich D_y , speziell für $\varphi_x = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi_y = \varphi_z = \frac{\pi}{2}$

Lösung 1

Diese Abbildung (Grundaufgabe der Methode der finiten Elemente) hat die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} y_3 & -x_3 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \quad d := x_2 y_3 - x_3 y_2$$

Lösung 2

a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Bilder von e_k , $k = 1, 2, 3$

b)

$$A_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2 \cdot A_1 \quad \text{Reihenfolge!} = \text{Drehung um die } x_3\text{-Achse, Drehwinkel } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Lösung 3

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \Sigma_e$$

$$\text{a) } F(P) = P', \quad P'(19/5) \quad \text{b) } g: r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } Fx = 0: \text{Kern}(F) = \text{span} \{(7, -8, 5)^T\}$$

Lösung 4

$$\text{a) } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S^2 = I_3$$

$$\text{b) } D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{pmatrix} \quad D_y = \begin{pmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{pmatrix} \quad D_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D_y \cdot D_x \cdot D_z \cdot S$$

Aufgabe 5

Sei E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt orthogonal zum Vektor $n = (1, -1, 2)^T$

- Geben Sie die Abbildung $\mathcal{P}$ an, die jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf die Ebene E projiziert.
- Stellen Sie die Abbildung $\mathcal{P}$ durch eine Abbildungsmatrix P bezüglich der Standardbasis $\Sigma_e : (= e_1, e_2, e_3)$ dar.
- Was für Eigenschaften hat P ?
- Wählen Sie ein neues Koordinatensystem Σ' so, dass die neue Abbildungsmatrix P' möglichst einfach wird.

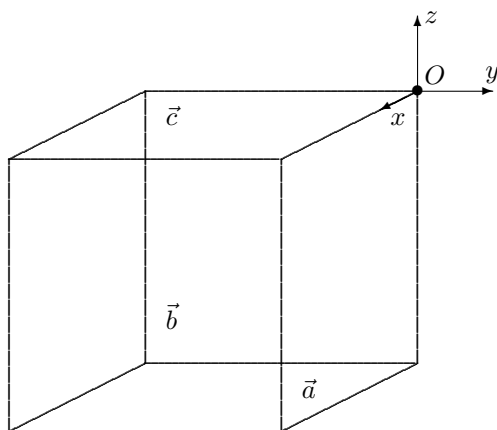
Aufgabe 6

- Welche der folgenden Vektor-Tripel bilden eine Basis im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{lll} f_1 = (1, 0, 1)^T & f_2 = (0, 1, 1)^T & f_3 = (1, 1, 0)^T \\ g_1 = (1, 2, 1)^T & g_2 = (2, 1, 1)^T & g_3 = (4, 5, 3)^T \\ h_1 = (3, 2, -4)^T & h_2 = (2, 4, 6)^T & h_3 = (17, 6, 4)^T \end{array}$$

- Der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bzgl. der Standardbasis Σ_e die Koordinaten $(1, 2, 3)^T$. Bestimmen Sie in den Fällen, in denen obige Vektoren eine Basis bilden, die Koordinaten von v .

Aufgabe 7



Gegeben: $\vec{a}$, $\vec{b}$ sowie $\vec{c}$ im Einheitswürfel, Kantenlänge = 1, cf. Figur und ein Vektor $\vec{d} = (1, 1, 1)^T$

- $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
- Bestimmen Sie eine o.n. Basis Σ' mit $b_1 = \text{Vielfaches von } \vec{a}$, b_1 und b_2 liegen in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.
- $\vec{d}$ in der neuen Basis Σ'

Aufgabe 8

Gegeben sind die beiden Vektoren $a = (2, 1)^T$ und $b = (-3, 6)^T$. Diese beiden Vektoren sind orthogonal. Gesucht ist $v = (-20, 16)^T$ als Linearkombination von a und b .

Aufgabe 9

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Teilmengen $\mathbb{T}$ der Menge $\mathbb{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \subset \mathbb{R}^4$, die eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

Aufgabe 10

Im $\mathbb{R}^4$ wird durch die Vektoren $\{a_1, a_2, a_3\}$ ein Unterraum U und durch die Vektoren $\{b_1, b_2, b_3\}$ ein Unterraum V aufgespannt, also $U = \text{span}\{a_1, a_2, a_3\}$ und $V = \text{span}\{b_1, b_2, b_3\}$.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie je eine Basis der Unterräume $U + V$ sowie $U \cap V$.

Aufgabe 11

- a) Zeigen Sie, dass durch folgende Abbildung ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ der $n \times n$ -Matrizen definiert ist:

$$(A, B) := \text{Spur}(AB^T), \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- b) Sei D eine $n \times n$ -Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen. Behauptet wird, dass folgende Vorschrift

$$(x, y) := x^T D y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

ein Skalarprodukt definiert. Beweisen Sie diese Behauptung.

Aufgabe 12

Auf dem Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2 ist das Skalarprodukt

$$(p, q) := \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

definiert.

- a) Orthonormieren Sie die Standardbasis $\{1, x, x^2\}$ von $\mathcal{P}_2$ bezüglich diesem Skalarprodukt. Gram-Schmidt
b) Projizieren Sie die Funktion $f(x) = e^x$ orthogonal auf $\mathcal{P}_2$.