

DMa3 Serie 4

Aufgabe 1

Wir betrachten den Vektorraum $V = C([0, 2\pi])$.

- a) Zeigen Sie, dass $\{1, \cos(2x)\}$ und $\{\sin^2(x), \cos^2(x)\}$ denselben Unterraum von V erzeugen.
- b) Wir versehen V mit dem folgenden Skalarprodukt:

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

Zeigen Sie, dass 1 , $\sin(x)$ und $\cos(x)$ orthogonal sind.

Aufgabe 2

Die folgenden Vektoren erzeugen einen Unterraum U von $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie die Dimension von U .
- b) Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis von U .
- c) Ergänzen Sie die Basis von b) zu einer orthonormierten Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Welche der folgenden drei Systeme von Polynomen sind erzeugend, welche linear unabhängig?

- a) $P_1(x) = (x+1)^2$, $P_2(x) = x^2 + 1$, $P_3(x) = (x-1)^2$.
- b) $P_1(x) = (x+1)^2$, $P_2(x) = (x-1)^2$, $P_3(x) = (x+2)^2$.
- c) $P_1(x) = x^2 - 1$, $P_2(x) = x^2 + x$, $P_3(x) = x + 1$, $P_4(x) = x - 1$.

Aufgabe 4

Im Vektorraum $\mathcal{P}$ der Polynome definiert

$$(P, Q) := \int_0^1 P(x)Q(x) dx, \quad P, Q \in \mathcal{P}$$

ein Skalarprodukt.

- a) Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das orthogonal auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.
- b) Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen $P_m(x) = x^m$ und $P_n(x) = x^n$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$.
Tipp: Berechnen Sie zuerst $\cos^2(\varphi)$ und damit $\sin^2(\varphi)$. Daraus ergibt sich ein einfacher Ausdruck für $\sin(\varphi)$

Lösung 1

- a) $e_1 = 1$ und $e_2 = \cos(2x)$ sowie $b_1 = \sin^2(x)$ und $b_2 = \cos^2(x)$
 $e_1 = b_1 + b_2$ und $e_2 = b_2 - b_1$, d.h. e_1 und e_2 lassen sich eindeutig als LK von b_1 und b_2 darstellen.
 (und umgekehrt)
- b) $(1, \sin(x)) = \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$, $(1, \cos(x)) = \dots$ analog
 $(\sin(x), \cos(x)) = \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2x dx = 0$

Lösung 2

Gauss-Algorithmus $A = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5) = 4 \times 5$ -Matrix

- a) Endscheema:

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

die Pivotspalten bilden eine Basis, also auch die entsprechenden Spaltenvektoren

$\text{Rang}(A) = 2$, d.h. $\dim(U) = 2$ und $U = \text{span}\{v_1, v_3\}$

- b) LK von v_1 und v_3 so, dass die Rechnung einigermassen durchführbar (möglichst viele Nullen): z.B.
 $b_1 = v_1 - v_3$ und $b_2 = v_1 + v_3$
 orthonormierte Basis mit Gram-Schmidt:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{154}} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- c) mit

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{231}} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung 3

- a) linear abhängig und nicht erzeugend
 b) linear unabhängig und erzeugend
 b) linear abhängig und erzeugend

Lösung 4

- a) $P_2(x) = \alpha(6x^2 - 6x + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
 b)

$$\cos^2(\varphi) = \frac{\left(\int_0^1 x^{m+n} dx\right)^2}{\int_0^1 x^{2m} dx \int_0^1 x^{2n} dx} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{(m+n+1)^2} = 1 - \frac{(m-n)^2}{(m+n+1)^2}$$

$$\text{also } \sin(\varphi) = \pm \frac{m-n}{m+n+1}$$