MLAN1 Matrizen
Serie 6

Aufgabe 1

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem $Bx = c$ mit dem **Gauss – Algorithmus**, wobei die Systemmatrix B und die rechte Seite c wie folgt gegeben sind:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie diese Situation geometrisch.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mit dem **Gauss – Algorithmus** die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems (*exakte* Angaben):

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & & & - & x_3 & + & 9x_4 & = & 7 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 18x_4 & = & 11 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 11x_3 & - & 5x_4 & = & -8 \\ & - & 4x_2 & + & 10x_3 & - & 10x_4 & = & -27 \end{array} \right.$$

Aufgabe 3

Gegeben: ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, $m = n$ und zudem sei $a_{jj}^{(j)} \neq 0$ für $j = 1, 2, \cdots, n$.

a) Bestimmen Sie den **Rechenaufwand** für den $1-$ ten, $2-$ ten, $3-$ ten, $\ldots$, $j-$ten Eliminationsschritt (der Rechenaufwand ist im wesentlichen die Anzahl der **wesentlichen Operationen**; wesentliche Operationen sind dabei Multiplikation und Division)

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand für *alle* Eliminationsschritte.

Aufgabe 4

Gauss – Algorithmus für

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 14x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 13x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 20x_4 & = & 7 \end{array} \right.$$

Aufgabe 5

Diskutieren Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme:
mit Angabe der entsprechenden Lösungen.

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & ax_2 & = & 8 \\ ax_1 & + & 8x_2 & = & a^2 \end{array} \right. \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{rcrcr} bx_1 & + & 3x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & b \end{array} \right. \quad \text{c)} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_2 & = & 2x_1 & + & 3 \\ x_2 & = & mx_1 & + & q \end{array} \right.$$

Aufgabe 6

Gegeben ist die folgende Zahlenfolge:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 11 \quad a_3 = 31 \quad a_4 = 1341 \quad a_5 = 142361 \quad a_6 = 1624331281 \quad \ldots$$

Gesucht ist ein Bildungsgesetz für diese Zahlenfolge.
Wie würde a_7 lauten?

MLAN1 Matrizen
Lösungen Serie 6

Lösung 1

$\infty-$viele Lösungen mit einem freien Parameter

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}, \text{ d.h. } g_1 = g_2 = g_3$$

d.h. drei zusammenfallende Geraden.

Lösung 2

$x^T = \left(\frac{43}{4},\ 33,\ 10,\ -\frac{1}{2}\right)$

Lösung 3

a) $(E)_1$: $(n-1)$ Div. und $(n-1) \cdot n$ Mult., insgesamt: $n^2 - 1$ w.O.
$(E)_2$: $(n-2)$ Div. und $(n-2) \cdot (n-1)$ Mult., insgesamt: $(n-1)^2 - 1$ w.O.
$(E)_3$: $(n-3)$ Div. und $(n-3) \cdot (n-2)$ Mult., insgesamt: $(n-2)^2 - 1$ w.O.
...
$(E)_j$: $O(n) = (n-j+1)^2 - 1$ w. O.

b) alle Schritte zusammen: $O(n) = \sum\limits_{j=1}^{n} (E)_j = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) - n \quad$ w. O.

Lösung 4

Vorzeitiger Abbruch nach 2 Schritten:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & -\ 17x_1 & - & 43x_2 & + & 3 \\ x_4 & = & 7x_1 & + & 19x_2 & - & 1 \end{array} \right. \qquad x_1, x_2 = \text{freie Parameter}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -17 \\ 7 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -43 \\ -19 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \mu \\ x_2 & = & \nu \end{array} \right. \qquad \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Lösung 5

a)
- $a \neq \pm 4$: genau eine Lösung: $x_1 = 4 + \frac{a^2}{a+4}$ und $x_2 = -\frac{2a}{a+4}$
- $a = 4$: $\infty-$viele Lösungen mit einem freien Parameter: $x_1 = -2\mu + 4$, $x_2 = \mu \in \mathbb{R}$ freier Parameter
- $a = -4$: keine Lösung

b)
- $b \neq 3$: genau eine Lösung: $x_1 = \frac{3b-1}{3-b}$ und $x_2 = \frac{1-b^2}{3-b}$
- $b = 3$: keine Lösung

c)
- $m \neq 2$: genau eine Lösung: Schnittpunkt zweier Geraden
- $m = 2$ und $q = 3$: $\infty-$ viele Lösungen, zwei zusammenfallende Geraden $g = h$
- $m = 2$ und $q \neq 3$: keine Lösung, zwei parallele Geraden $g \parallel h$ und $g \neq h$

Lösung 6

ein mögliches Bildungsgesetz ist das folgende:

- $a_1 = 1$, vor a_2 steht eine Eins, also ist $a_2 = 11$,
- vor a_3 stehen drei Einsen, also ist $a_3 = 31$,
- vor a_4 stehen eine Drei und vier Einsen, also ist $a_4 = 1341$,
- vor a_5 stehen eine Vier zwei Dreien und sechs Einsen, also ist $a_5 = 142361$,
- usw.

$a_7 = 1826345332111$