

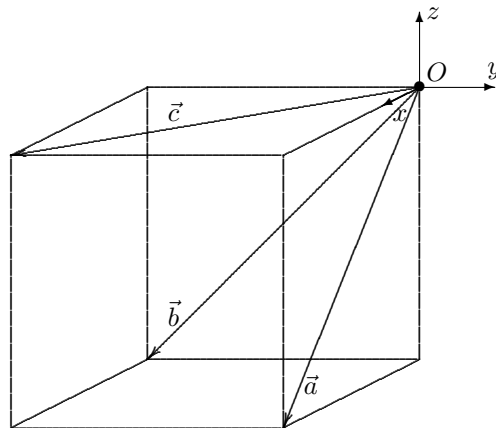
MLAN3 Serie 12

Aufgabe 1

Betrachten Sie die *Spiegelung* S im $\mathbb{R}^3$ an der xz -Ebene

- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bzgl. der Standardbasis Σ_e .
- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bzgl. Σ_{neu} , wobei $b_1 = \mu \cdot (1, 1, 1)^T$, $b_3 = \mu \cdot e_2 + \nu \cdot e_3$, $b_2 = \dots$? Σ_{neu} soll o.n. sein.
- Was für Eigenschaften haben die Matrizen in a) und b)?

Aufgabe 2



Gegeben: $\vec{a}$, $\vec{b}$ sowie $\vec{c}$ im Einheitswürfel, Kantenlänge = 1, cf. Figur und ein Vektor $\vec{d} = (1, 1, 1)^T$

- $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
- Bestimmen Sie eine o.n. Basis Σ_{neu} mit $\vec{b}_1 = \text{Vielfaches von } \vec{a}$, $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ liegen in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene (Gram – Schmidt).
- $\vec{d}$ bzgl. der neuen Basis Σ_{neu} .

Aufgabe 3

Gegeben sei die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & b \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass für das *charakteristische Polynom* der Matrix C gilt: $p_C(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$.
- Geben Sie eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ so an, dass $T^{-1}CT$ mit den Werten von a und b aus a) Diagonalgestalt hat.
- Verwenden Sie die Darstellung von C aus b) zur Berechnung von C^k , $k \in \mathbb{N}$, wobei $C^0 = I_3$.

Aufgabe 4

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Lösen Sie das EWP von A .
- b) Bestimmen Sie A^{-1} .
- c) Lösen Sie das EWP von A^{-1} . Was stellen Sie fest?

Aufgabe 5

Sei $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^n , $n \in \mathbb{N}$, $A^0 := I_2$

Aufgabe 6

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

- a) Eigenschaften von A , EWP von A
- b) $y = Ax$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Längen der beiden Vektoren x und y . Was ist auffällig?

Lösung 1

$$\text{a) } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)^T, \text{ für } b_3: \mu = -\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ also}$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \quad b_2 = b_3 \times b_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \pm 2 \\ \mp 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \quad \text{die neue Basis ist so ein Rechtssystem,}$$

$$\text{und damit } S_{\text{neu}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{2} & \mp\sqrt{6} \\ \pm\sqrt{2} & 2 & \sqrt{3} \\ \mp\sqrt{6} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } S \text{ und } S_{\text{neu}} \text{ sind ähnliche Matrizen: } \det(S) = \det(S_{\text{neu}}) = -1, S^{-1} = S^T = S, S^2 = I_3, \\ \text{analog: } S_{\text{neu}}^{-1} = S_{\text{neu}}^T = S_{\text{neu}}, S_{\text{neu}}^2 = I_3$$

Lösung 2

$$\text{a) } \vec{d} = \frac{1}{2} \vec{a} - \frac{3}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$$

$$\text{b) z.B.:}$$

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{d} = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2 + \mu_3 \vec{b}_3, \text{ wobei } \mu_k = \vec{d} \cdot \vec{b}_k, k = 1, 2, 3, \text{ also } \mu_1 = 0, \mu_2 = -\frac{4}{\sqrt{6}} \text{ und } \mu_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

cf. MLAN3 Serie 2, Aufgabe 2 (statt μ_k haben Sie dort die c_k).

Lösung 3

$$\text{a) } a = 0, b = 2$$

$$\text{b) } \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 1, T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = T^{-1}CT$$

$$\text{c) } C = TDT^{-1} \text{ und } C^k = TD^kT^{-1} \\ \text{somit erhalten wir: } C^k = A^2 \text{ für } k \text{ gerade und } C^k = A \text{ für } k \text{ ungerade}$$

Lösung 4

$$\text{a) } \lambda_1 = 4, E_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \lambda_2 = 2, E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) EW von A^{-1} sind die Kehrwerte der EW von A . Die Eigenräume werden von denselben EV aufgespannt!
 $E_4 = E_{1/4}$ und $E_2 = E_{1/2}$

Lösung 5

$$A^n = T D^n T^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 + 2^n & -2 + 2^{n+1} \\ -2 + 2^{n+1} & 1 + 2^{n+2} \end{pmatrix}$$

Lösung 6

a) A ist orthogonal, $A^{-1} = A^T$ und $\det(A) = 1$, EWP: $\lambda_{1,2} = e^{\pm j\varphi}$, $E_{\lambda_{1,2}} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \pm j \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\|x\| = \|y\|$, insbes. in der 2- Norm, längentreue Abbildung, $A = D_\varphi$ =Drehung um den Winkel φ .