

MLAN3
Serie 7

Aufgabe 1

Gegeben ist $f(x) = \cos(x)$.

Gesucht ist ein Polynom $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, sodass gilt:

$$f(0) = p_n(0) \quad \text{und} \quad f'(0) = p'_n(0) \quad \text{und} \quad \dots \quad f^{(k)}(0) = p_n^{(k)}(0) \quad \dots \quad \text{und} \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0).$$

Betrachten Sie zuerst speziell die Werte $n = 4, n = 6, \dots, n$ gerade.

Aufgabe 2

Auf dem Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2 ist das Skalarprodukt

$$(p, q) := \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

definiert.

- a) Orthonormieren Sie die Standardbasis $\{1, x, x^2\}$ von $\mathcal{P}_2$ bezüglich diesem Skalarprodukt. Gram-Schmidt
- b) Projizieren Sie die Funktion $f(x) = e^x$ orthogonal auf $\mathcal{P}_2$, cf. Serie 5 Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Im Vektorraum $\mathcal{P}$ der Polynome definiert

$$(P, Q) := \int_0^1 P(x)Q(x) dx, \quad P, Q \in \mathcal{P}$$

ein Skalarprodukt.

- a) Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das orthogonal auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.
- b) Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen $P_m(x) = x^m$ und $P_n(x) = x^n$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$.
Tipp: Berechnen Sie zuerst $\cos^2(\varphi)$ und damit $\sin^2(\varphi)$. Daraus ergibt sich ein einfacher Ausdruck für $\sin(\varphi)$

Aufgabe 4

Betrachten Sie für $m, n \in \mathbb{Z}$ die beiden Integrale

$$\text{a) } I_a = \int \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = ? \quad \text{b) } I_b = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = ?$$

Aufgabe 5

Wir betrachten den Polynom – Raum über dem Intervall $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$(1) \quad (p, q) := \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx$$

Die ersten drei *Legendre – Polynome* sind wie folgt gegeben (bis auf einen Faktor): $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ und $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$.

- a) Zeigen Sie, dass diese Polynome paarweise orthogonal sind.
- b) Bestimmen Sie c so, dass $P_3(x) = x^3 - cx$ orthogonal zu den ersten drei Polynomen wird.
- c) Bestimmen Sie ein Polynom 4-ten Grades, das orthogonal zu $P_0, \dots, P_3$ ist.

Aufgabe 6

Geben Sie in Polarform an:

$$\text{a) } z_a = \frac{1+j}{1-j} \quad \text{b) } z_b = (2+j)^2 \quad \text{c) } z_c = (1+j)^3 \quad \text{d) } z_d = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - j \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\text{a) } z_a = \sqrt{-1 + j\sqrt{3}} \quad \text{b) } z_b = \sqrt[3]{3 - j\sqrt{3}} \quad \text{c) } z_c = \sqrt[4]{-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}} \quad \text{d) } z_d = \sqrt[5]{-1}$$

Lösung 1

Es handelt sich hier um eine spezielle Projektion (Taylor-Polynom) einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ auf den polynomialen Unterraum $\mathcal{P}_n$, cf. Serie 2, Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} n=4: \quad & a_4 = \frac{1}{4!} \quad a_3 = 0 \quad a_2 = -\frac{1}{2!} \quad a_1 = 0 \quad a_0 = 1 \\ n=6: \quad & a_6 = -\frac{1}{6!} \quad a_4 = \frac{1}{4!} \quad a_2 = -\frac{1}{2!} \quad a_0 = 1 \\ \dots & \dots \\ \text{allgemein:} \quad & a_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k)!} \quad a_{2k+1} = 0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (2) \quad & p_4(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \\ (3) \quad & p_6(x) = p_4(x) - \frac{1}{6!}x^6 \\ (4) \quad & p_8(x) = p_6(x) + \frac{1}{8!}x^8 \\ (5) \quad & p_{10}(x) = \dots \end{aligned}$$

Lösung 2

a) $f_1 = 1$, da $\int_0^1 1 \, dx = 1$ folgt, dass $e_1 = 1$

$$f_2 = x \text{ und } e_2 = \frac{1}{\| \dots \|} (f_2 - (f_2, e_1) e_1) = 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2})$$

$$f_3 = x^2 \text{ und } e_3 = \frac{1}{\| \dots \|} (f_3 - (f_3, e_1) e_1 - (f_3, e_2) e_2) = 6\sqrt{5}(x^2 - x + \frac{1}{6})$$

b) $f(x) = e^x$, $P := \text{Proj. von } f \text{ auf } \mathcal{P}_2$

$$p_2(x) = P f(x) = (f, e_1) e_1 + (f, e_2) e_2 + (f, e_3) e_3$$

$$(f, e_1) = e - 1, (f, e_2) = \sqrt{3}(-e + 3), (f, e_3) = \sqrt{5}(7e - 19)$$

und schliesslich

$$p_2(x) = (210e - 570) \cdot x^2 + (-216e + 588) \cdot x + (39e - 105) \cdot 1$$

Die ganze Rechnung ist aufwendig, da die gegebene Basis nicht o.n.

Lösung 3

a) $P_2(x) = \alpha(6x^2 - 6x + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

b)

$$\cos^2(\varphi) = \frac{\left(\int_0^1 x^{m+n} dx\right)^2}{\int_0^1 x^{2m} dx \int_0^1 x^{2n} dx} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{(m+n+1)^2} = 1 - \frac{(m-n)^2}{(m+n+1)^2}$$

$$\text{also } \sin(\varphi) = \pm \frac{m-n}{m+n+1}$$

Lösung 4

Orthogonalität der Fourierbasis, speziell der $\sin$ – Funktionen

a)

$$(6) \quad I_a = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(n-m)} \cdot \sin((n-m)x) - \frac{1}{(n+m)} \cdot \sin((n+m)x) \right\} + C, & n \neq m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{1}{2n} \cdot \sin(2nx) \right\} + C, & n = m \neq 0 \\ 0 + C, & n = m = 0. \end{cases}$$

b)

$$(7) \quad I_b = \begin{cases} 0, & \text{für } n \neq m \text{ oder } n = m = 0 \\ \pi, & \text{für } n = m \neq 0. \end{cases}$$

Lösung 5

a) Durch Nachrechnen. Für ungerade Potenzen in x gilt: $\int_{-1}^1 x^k dx = 0$, $k = 2 \cdot i + 1$, $i \in \mathbb{N}$.

b) $c = \frac{3}{5}$

c) Ansatz für $P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Das Skalarprodukt ist linear!

$$(8) \quad (P_4, 1) = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c + 2e \stackrel{!}{=} 0$$

$$(9) \quad (P_4, x) = \frac{2}{5}b + \frac{2}{3}d \stackrel{!}{=} 0$$

$$(10) \quad (P_4, x^2 - \frac{1}{3}) = (P_4, x^2) - \frac{1}{3}(P_4, 1) \stackrel{(8)}{=} \frac{2}{7}a + \frac{2}{5}c + \frac{2}{3}e \stackrel{!}{=} 0$$

$$(11) \quad (P_4, x^3 - \frac{3}{5}x) = (P_4, x^3) - \frac{3}{5}(P_4, x) \stackrel{(9)}{=} \frac{2}{7}b + \frac{2}{5}d \stackrel{!}{=} 0$$

Mit (9) und (10) folgt sofort: $b = d = 0$ und aus (8) und (10)

Gauss-Algorithmus: Endschema

a	c	e	1
①	$\frac{5}{3}$	5	0
0	①	10	0

$e = \text{freier Parameter}$, $c = -10e$ und $a = \frac{35}{3}e$.

und somit $P_4(x) = \left(\frac{35}{3}x^4 - 10x^2 + 1\right)e$, $e \in \mathbb{R}$.

Lösung 6

a) $z_a = e^{j\frac{\pi}{2}}$

b) $z_b = 5 \cdot e^{j\varphi}$, wobei $\varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

c) $z_c = 2\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$

d)

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$$

$$\text{also } r = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \text{ und } \varphi = -\arctan\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right) + 2\pi.$$

Lösung 7

a)

$$z_{a_{1,2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{6}}{2}$$

b)

$$z_{b_k} = \sqrt[6]{12} \cdot e^{j\varphi_k}, \quad k = 0, 1, 2, \quad \varphi_0 = \frac{11\pi}{18}, \quad \varphi_1 = \frac{23\pi}{18}, \quad \varphi_2 = \frac{35\pi}{18}$$

c)

$$r = 1, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad \varphi_3 = \frac{4\pi}{3}, \quad \varphi_4 = \frac{11\pi}{6}$$

d)

$$r = 1, \quad \varphi_k = \frac{\pi}{5} + k \frac{2\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Erweiterung zur Theorie

Das Beispiel 2 ist nicht ganz zufällig gewählt.

Es besteht der folgende *wichtige* Zusammenhang zwischen der Approximation $f_{approx} \in \mathcal{Q}$ einer gegebenen Funktion $f \in V$ und der Funktion f selbst (dabei wird f_{approx} durch eine Projektion bestimmt, cf. Serie 5 Aufgabe 1):

Approximation von Funktionen

Sei $e_1, e_2, \dots, e_m$ eine *orthonormierte* Basis

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

des Raumes $\mathcal{Q} = \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Sei $f \in V$, und $\mathcal{Q} \subset V$, $\dim(\mathcal{Q}) = m$.

In V sei ebenfalls das Skalarprodukt von $\mathcal{Q}$ definiert.

Behauptung:

Die Projektion von f auf $\mathcal{Q}$

$$f_{approx}(x) = \sum_{k=1}^m (f, e_k) e_k$$

hat *minimalen Abstand* von f , d.h.

$$\|f - f_{approx}\| = \min_{q \in \mathcal{Q}} \|f - q\|$$

D.h. $f_{approx} \in \mathcal{Q}$ ist für f in $\mathcal{Q}$ die *bestmögliche* Approximation.

Beweis:

Sei $q \in \mathcal{Q}$ mit $q = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|f - q\|^2 &= (f - q, f - q) \\ &= (f, f) - 2(f, q) + (q, q) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^m \alpha_i (f, e_i) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \end{aligned}$$

Der Abstand $\|f - q\|^2$ ist genau dann minimal, falls

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \|f - q\|^2 &= -2(f, e_j) + 2\alpha_j \\ &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \Leftrightarrow \alpha_j &= (f, e_j) \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Beispiele:

- 1) $m = n + 1$ und $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_n$: polynomiale Approximation einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$.
- 2) $m = 2n + 1$ und $a_0 = 1$, $a_1 = \cos(x)$, $b_1 = \sin(x)$, $\dots$, $a_k = \cos(kx)$, $b_k = \sin(kx)$, $\dots$, $a_n = \cos(nx)$, $b_n = \sin(nx)$: Approximation einer 2π -periodischen Funktion f durch ein Fourierpolynom.