

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch den Nullpunkt, die den Inhalt des Flächenstückes halbiert, das von der Parabel $y = -x^2 + 3x$ und der x -Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 2

Für welchen Wert des Parameters $a > 0$ schliesst die Kurve mit der Gleichung $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$ zusammen mit der x -Achse im ersten Quadranten eine Fläche mit Inhalt 6 ein?

Aufgabe 3

Die Kurve $y = p_2(x)$ der Parabel mit der Gleichung $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ schneidet die x -Achse in den Punkten $A(1, 0)$ und $B(4, 0)$. AB ist die Seite eines Quadrates, das im ersten Quadranten liegt. Wie sind die Parameter in der Parabelgleichung zu wählen, damit der Parabelbogen durch die Punkte A und B die Quadratfläche halbiert?

Aufgabe 4

Die Kurve $y = p_2(x)$ der Parabel $p_2(x) = -x^2 + 2x + 3$ und die positiven Koordinatenachsen umschliessen ein Flächenstück. Wie muss c in der Geradengleichung $x = c$ gewählt werden, damit die Gerade das Flächenstück halbiert?

Aufgabe 5

Leiten Sie mit Hilfe der Formel von „de Moivre“ eine Formel für

- a) $\cos(4x)$: dabei ist $\cos(4x)$ durch $\cos(x)$ *allein* auszudrücken.
- b) $\sin(5x)$: dabei ist $\sin(5x)$ durch $\sin(x)$ *allein* auszudrücken.

her

Aufgabe 6

Gesucht sind Real-und Imaginärteil von:

$$\text{a) } z_a = \frac{1-j}{1+2j} - \frac{1+3j}{1-2j} \quad \text{b) } z_b = \frac{(1+j)(1-2j)(3+7j)}{(4-5j)(1+3j)^2}$$

Aufgabe 7

Gegeben sind $z_0 \in \mathbb{C}$ sowie $r \in \mathbb{R}^+$.

Gesucht sind alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\text{a) } |z_0 - z| = r \quad \text{b) } |z_0 - z| < r$$

Stellen Sie die gesuchten Punktmengen in der Gauss'schen Ebene graphisch dar.

Aufgabe 8

Von einer Schwingung ist der folgende Zusammenhang bekannt:

$$A \cos(\lambda x + \varphi) = \alpha \cos\left(\lambda x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{3}\right)$$

- a) Stellen Sie A als Funktion von α dar.
- b) Für welche Werte von α wird $A(\alpha)$ minimal, $A_{\min} = ?$
- c) Wie gross wird die zu b) gehörige Phase φ ?
- c) Wie gross muss λ sein, damit die kleinste positive Nullstelle der Schwingung für den Fall b) gerade $\frac{\pi}{2}$ ist?

Lösung 1

Gerade: $y = mx \Rightarrow$ Schnittstellen der Parabel mit der Geraden: 0 und $3 - m$
 Die Fläche des Parabelsegmentes ist $\frac{9}{2}$.

$$\int_0^{3-m} (-x^3 + 3x - mx) dx = \frac{1}{6}(3-m)^3 = \frac{9}{4} \Rightarrow m = 3 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

Lösung 2

nebenbei: ungerade Funktion $\Rightarrow$ Kurve symmetrisch zum Ursprung.

Nullstellen: 0 und $\pm\sqrt{3a}$

$$\int_0^{\sqrt{3a}} (-\frac{1}{3}x^3 + ax) dx = \frac{3}{4}a^2 = 6 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

Lösung 3

Gleichung der Parabel: $p_2(x) = a(x-1)(x-4)!!$

$$\int_1^4 a(x-1)(x-4) dx = -\frac{9}{2}a = \frac{9}{2} \Rightarrow a = -1$$

$$p_2(x) = -(x-1)(x-4) = -x^2 + 5x - 4 \Rightarrow a = -1, b = 5, c = -4$$

Lösung 4

$p_2(x) = -(x-3)(x+1) \Rightarrow$ Nullstellen: $x = -1$ und $x = 3$

$$\Rightarrow \int_0^c (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}c^3 + c^2 + 3c = \frac{9}{2} \Rightarrow c = 1.209095150 \text{ mit Newton, Iteration oder Bisektion}$$

Lösung 5

a) $\cos(4x) = 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1$

b) $\sin(5x) = 16 \sin^5(x) - 20 \sin^3(x) + 5 \sin(x)$

Lösung 6

a) $z_a = \frac{4}{5}(1-2j)$ b) $z_b = \frac{1}{205}(56-53j)$

Lösung 7

a) Kreislinie eines Kreises k mit Zentrum $M = z_0$ und Radius r :

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = r^2, \text{ wobei } z_0 = x_0 + jy_0 \text{ und } z = x + jy$$

b) das Innere eines Kreises k mit Zentrum $M = z_0$ und Radius r :

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 < r^2$$

Lösung 8

a) $A(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 4}$

b) $\alpha = 1$ mit $A_{min} = \sqrt{3}$

c) $\varphi_1 = -\frac{2\pi}{3}$ bzw. $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$

d) $\lambda = \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{11}{3}$