

Aufgabe 1

Geben Sie möglichst einfache *rationale* Funktionen an, deren Kurven wie folgt aussehen:

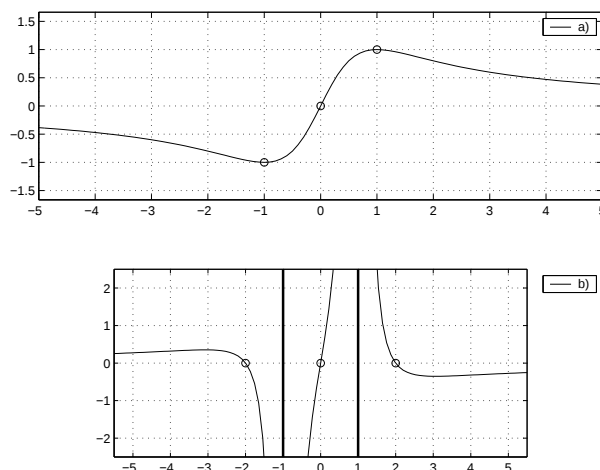


Abbildung 1: a) $y = f(x)$ allg: Maximum bei (a, b) und b) $y = g(x)$

Aufgabe 2

Stellen Sie die Gleichung eines Polynoms 3-ten Grades auf, so dass die Kurve $y = p_3(x)$ die x -Achse im Ursprung berührt und deren Tangente im Punkt $B(-2, 8)$ die Steigung -9 hat, graphische Darstellung.

Aufgabe 3

$$y = f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

- graphische Darstellung
- Gleichung einer durch $P(0, \frac{3}{2})$ gehenden Gerade, die die Kurve $y = f(x)$ in drei äquidistanten Punkten P_1, P_2 und P_3 schneidet, Anzahl Lösungen?
- Koordinaten der Punkte in b)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die *Partialbruchzerlegung* von

$$\text{a) } q_a(x) = \frac{1}{3x - x^3} \quad \text{b) } q_b(x) = \frac{3x^2 - 7x + 6}{(x - 1)^3} \quad \text{c) } q_c(x) = \frac{3x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 16x + 5}{x^2 - x - 2}$$

Aufgabe 5

Wie gross ist der halbe Öffnungswinkel eines geraden Kreiskegels K , der einer Halbkugel mit dem Radius R umschrieben ist,

- dessen Volumen V ,
- dessen Mantelfläche M

minimal ist?

Lösung 1

- a) $f(x) = \frac{kx}{x^2+c}$ mit $c = a^2$ und $k = 2ab$, $y = 0$ ist horizontale Asymptote, f ist ungerade.
- b) $g(x) = -k \frac{x(x+2)(x-2)}{(x+1)^2(x-1)^2}$, $x = -1$ und $x = 1$ sind je ein *doppelter* Pol (kein Vorzeichenwechsel), $y = 0$ ist horizontale Asymptote, g ist ungerade.

Lösung 2

allgemeiner Ansatz: $p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ und somit $p_3(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

Lösung 3

- a) $D(f) = \mathbb{R}$ und $W(f) = (0, 2]$, es handelt sich um eine gerade Funktion, $y = 0$ ist horizontale Asymptote, horizontale Tangente im Punkt $(0, 2)$, Wendepunkte in $W_{1,2}(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2})$
- b) zwei Lösungen: $g_{1,2}: y = \pm \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$
- c) für $g_1: P_1(-1 - \sqrt{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}), P_2(-1, 1)$ und $P_3(-1 + \sqrt{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
für $g_2: P_1(-1 - \sqrt{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}), P_2(1, 1)$ und $P_3(1 + \sqrt{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

Lösung 4

- a) $q_a(x) = \frac{1/3}{x} + \frac{-1/6}{\sqrt{3+x}} + \frac{1/6}{\sqrt{3-x}}$
- b) $q_b(x) = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)}$
- c) $q_c(x) = 3x^2 - 4 + \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x+1}$

Lösung 5

$\alpha =$ halber Öffnungswinkel von K , $r = \frac{R}{\cos \alpha} =$ Radius und $h = \frac{R}{\sin \alpha} =$ Höhe von K ;
sowie $l = \frac{R}{\sin \alpha \cos \alpha} =$ Mantellinie von K

- a) $V = r^2 \pi \frac{h}{3} = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$
- b) $M = \frac{1}{2} 2\pi r \cdot l = \pi R^2 \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$

Für a) und b): $\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \right) = 0$. Der Zähler dieser Ableitung lautet: $\cos \alpha (2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$, also $(2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 0$, da $\cos \alpha \neq 0$ und schliesslich $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, bzw. $\alpha = \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$